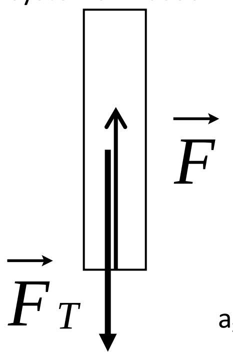
Chapitre 7 : La mécanique céleste.

I. La propulsion d'une fusée.

- *Mettre en œuvre une démarche expérimentale pour interpréter un mode de propulsion par réaction à l'aide d'un bilan qualitatif de quantité de mouvement.*

1) Etude du cas pour le système « fusée ».

La fusée est soumise à son poids et à la force de propulsion.
Le système « fusée » étudiée dans le référentiel: terrestre supposé galiléen



Les forces appliquées au système sont :

$\overrightarrow{F_T}$: Force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre

$\vec{F}$: Force de poussée

On applique la 2ème loi de Newton: $\overrightarrow{F_T} + \vec{F} = m.\vec{a}$

par projection sur l'axe O_z vertical dirigé vers la haut:

$-F_T + F = m.a_z$

$a_z = \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{F - F_T}{m}$ on assimile F_T à la force poids soit $F_T = m.g_0$

$a_z = \dfrac{F}{m} - g_0$

2) Etude du cas pour le système « fusée+gaz ».

a) <u>Précision :</u>

Pour une fusée, la règle du jeu consiste à éjecter une masse de matière (gazeuse ou liquide) avec une vitesse suffisante pour propulser l'engin dans l'autre sens.
Vidéo action-réaction : comment marche une fusée ?
http://www.dailymotion.com/video/x32g7i_action-reaction_news

Le principe de propulsion repose sur la loi de la conservation de la quantité de mouvement, connue également sous le nom de loi de l'action et de la réaction. C'est cette loi qui fait que si vous montez avec un ballon sur une planche à roulette, elle même posée sur un sol plat et bien lisse, lorsque vous lancez le ballon devant vous, vous reculez.
La quantité de mouvement d'un système matériel est la somme des quantités de mouvement de chacun de ses éléments matériels : $\overrightarrow{p_{système}} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}$

b) <u>Etude de cas :</u>

D'après la deuxième loi de Newton, dans un référentiel galiléen, le vecteur quantité de mouvement d'un système isolé ou pseudo-isolé reste constant. Dans le cas du système « fusée+gaz », le système est pseudo-isolée, la seule force appliquée étant le poids, la quantité de mouvement $\vec{p}_S$ du système se conserve au cours du temps. Entre les dates t = 0 et t = 1 s on a donc :

$\vec{p}_S(t = 0\ s) = \vec{p}_S(t = 1\ s)$

Initialement le système est immobile (on considère que les gaz n'ont pas encore eu le temps d'être éjectés de la fusée) donc $\vec{p}_S(t = 0\ s) = \vec{0}$ d'où $\vec{0} = \vec{p}_f + \vec{p}_g$,

soit $\vec{0} = m_f \cdot \vec{v}_f + m_g \cdot \vec{v}_g$

donc finalement : $\boxed{\vec{v}_f = -\dfrac{m_g}{m_f} \cdot \vec{v}_g}$

Lors du décollage, les gaz sont éjectés vers le bas. La relation précédente montre que la fusée est alors propulsée vers le haut. Il s'agit d'un exemple de mode de propulsion par réaction.

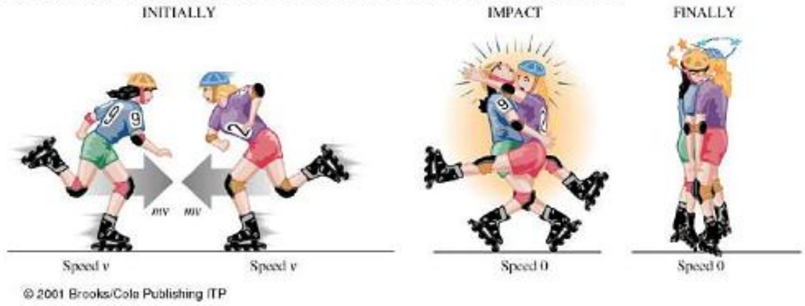
3) Conservation de la quantité de mouvement.

La loi de la conservation de la quantité de mouvement dit :

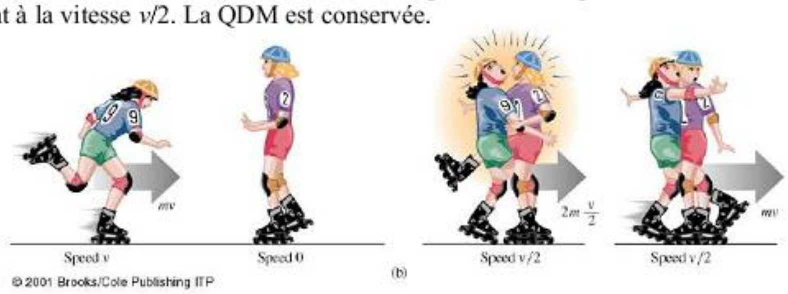
> "La quantité de mouvement d'un système matériel est nulle ou demeure constante si les forces extérieurs qui lui sont appliquées ont une résultante nulle".

Exemple 1 : vous êtes sur une planche à roulette avec un ballon.
Les forces de frottement de la planche à roulette sur le sol sont supposés nulles. Vous êtes en équilibre et immobile. Le système matériel composé de « votre personne sur la planche à roulette plus le ballon » a une résultante nulle des forces extérieures qui lui sont appliquées (poids compensé par la réaction du sol) et la vitesse étant nulle, la quantité de mouvement est nulle : $p = m \times v = 0$.
Si vous lancez le ballon (m_2), les deux parties du système matériel que vous formez ont une quantité de mouvement qui est le produit de leur masse respective par leur vitesse. Comme il y a conservation de la quantité de mouvement du système, on a : p = m*v = 0 = m1*v1 + m2*v2
donc v1 = -v2*(m2/m1)
Ce qui signifie que si le ballon de masse m_2 est lancé avec une vitesse v_2, l'expérimentateur sur sa planche à roulette partira en sens inverse du ballon à une vitesse v_1 égale au produit de la vitesse v_2 par le rapport de masse m_2/m_1. Si m_1 = 50 kg et m_2 = 1kg, v_1 sera 50 fois plus faible que v_2.

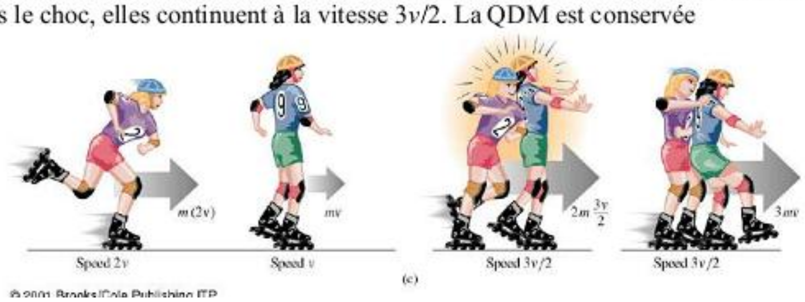
a) Elles s'élancent, l'une vers l'autre avec la même vitesse v. La QDM avant le choc est nulle. Après le choc, la QDM reste nulle et les patineuses restent sur place.



b) L'une arrive à la vitesse v, mais l'autre est au repos. Les deux patineuses restent collées et continuent à la vitesse $v/2$. La QDM est conservée.



c) Elles vont toutes les deux dans la même direction, l'une à la vitesse v et l'autre à la vitesse $2v$. Après le choc, elles continuent à la vitesse $3v/2$. La QDM est conservée



II. Mouvement d'un satellite. Révolution de la Terre autour du Soleil.

- Démontrer que, dans l'approximation des trajectoires circulaires, le mouvement d'un satellite, d'une planète, est uniforme. Établir l'expression de sa vitesse et de sa période.

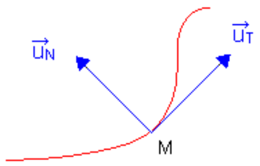
Une planète est soumise dans le référentiel héliocentrique à la force gravitationnelle exercée par le Soleil :
$\vec{F} = - G \cdot \frac{Ms.m}{r^2} \cdot \vec{u}$

Appliquons la deuxième loi de Newton : $\vec{F} = m. \frac{d\vec{V}}{dt}$ soit $\frac{d\vec{V}}{dt} = - G \cdot \frac{Ms.}{r^2} \cdot \vec{u}$

Remarque : le vecteur accélération d'une planète est indépendant de sa masse. Il est toujours suivant la direction Soleil-planète et il est dit **radial** ; il est toujours dirigé vers le centre du Soleil, il est dit **centripète**.

Le vecteur accélération n'est pas dirigé suivant une direction fixe comme pour l'étude d'un projectile dans un champ de pesanteur, il varie avec le mouvement en direction.

a. Comment étudier un tel mouvement circulaire ?



On utilise un repère dit repère de Frenet qui permet d'étudier le vecteur accélération suivant deux axe : un axe normal et un axe tangentiel.
Le vecteur unitaire $\vec{u}_T$ est tangent à la trajectoire plane, au point M où se trouve le mobile. Ce vecteur est orienté arbitrairement dans le sens du mouvement.
Le vecteur unitaire $\vec{u}_N$ est normal à la trajectoire. Il est orienté vers l'intérieur de la courbe.

Par définition : $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV}{dt} \vec{u}_T + \frac{V^2}{R} \vec{u}_N$

L'accélération **tangentielle fait varier la vitesse** alors que l'**accélération normale modifie la direction.**

b. Comment déterminer la vitesse du mouvement ?

On a $\frac{d\vec{V}}{dt} = - G \cdot \frac{Ms.}{r^2} \cdot \vec{u} = G \cdot \frac{Ms.}{r^2} \overrightarrow{Un}$ et $\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV}{dt} \overrightarrow{Ut} + \frac{V^2}{r} \overrightarrow{Un} = G \cdot \frac{Ms.}{r^2} \overrightarrow{Un}$

En identifiant on a sur $\overrightarrow{Ut}$: $\frac{dV}{dt} = 0$: la vitesse est constante

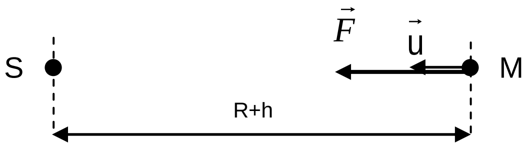
$\overrightarrow{Un}$: $\frac{V^2}{r} = G. \frac{Ms.}{r^2}$ d'où $V = \sqrt{\frac{G.Ms}{r}}$

c. Déterminons la période de révolution : Par définition, la période est $T = \frac{2.\pi}{V} = 2.\pi.\sqrt{\frac{r3}{G.Ms}}$

d. Retrouvons une loi célèbre : 3 éme loi de Kepler:

Elevons au carré : $T^2 = 4. \pi^2 . \frac{r3}{G.Ms}$ et $T^2/r^3 = cste$

Exemple d'exercice :
La planète (T) de masse m est soumise de la part du soleil de masse M à la force gravitationnelle

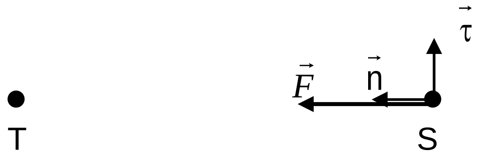


$$\vec{F} = G.\frac{M.m}{(R+h)^2}.\vec{u}$$

La masse m de Mars étant constante, la deuxième loi de Newton s'écrit : $\vec{F} = m.\vec{a}$

$G.\dfrac{m.M}{(R+h)^2}.\vec{u} = m.\overrightarrow{a_S}$ et finalement : $\overrightarrow{a_S} = \dfrac{G.M}{(R+h)^2}.\vec{u}$.

Dans le repère de Frenet $(S,\vec{n},\vec{\tau})$,



le vecteur accélération s'écrit : $\vec{a}_S = \dfrac{v^2}{(R+h)}.\vec{n} + \dfrac{dv}{dt}.\vec{\tau}$.

avec $\vec{n} = \vec{u}$ on a en égalant les deux expressions de l'accélération, il vient :

$$\frac{G.M}{(R+h)^2}.\vec{u} = \frac{v^2}{(R+h)}.\vec{u} + \frac{dv}{dt}.\vec{\tau}$$

Par identification on obtient : $\begin{cases} \text{sur } \vec{u} : & \dfrac{G \cdot M}{(R+h)^2} = \dfrac{v^2}{(R+h)} \\ \text{sur } \vec{\tau} : & 0 = \dfrac{dv}{dt} \Rightarrow v = cte \end{cases}$

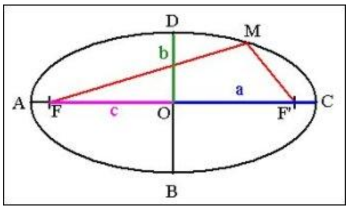
III. Lois de Kepler.

- Connaître les trois lois de Kepler ; exploiter la troisième dans le cas d'un mouvement circulaire.

1) Première Loi = Loi des orbites

Les planètes décrivent autour du Soleil des orbites en forme d'ellipses. Le soleil ne se trouve pas au centre de l'ellipse, mais sur un point appelé foyer.

C'est quoi une ellipse ? http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Coniques/Ellipse/Ellipse_foyers.html



O : centre

F et F' : foyers tel que OF = OF' = c avec **c** : distance du centre au foyer

a : longueur du demi grand axe

b : longueur du demi petit axe

AC : grand axe **AC = 2.a** **BD** : petit axe

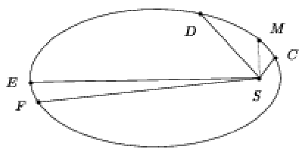
e : excentricité e = c/a

Pour tout point M de l'ellipse MF+MF'=2a

Pour une ellipse l'excentricité est comprise entre 0 et 1 ; si e est petit, on a presque un cercle.

2) Seconde Loi = Loi des aires

Si *S* est le Soleil et *M* une position quelconque d'une planète, l'aire balayée par le segment [*SM*] entre deux positions *C* et *D* est égale à l'aire balayée par ce segment entre deux positions E et F si la durée qui sépare les positions *C* et *D* est égale à la durée qui sépare les positions *E* et *F*.



La vitesse d'une planète devient donc plus grande lorsque la planète se rapproche du soleil. Elle est maximale au voisinage du rayon le plus court (périhélie), et minimale au voisinage du rayon le plus grand (aphélie).

3) Troisième Loi = Loi des périodes

Soient *T* la période sidérale d'un objet (temps entre deux passages successifs devant une étoile lointaine) et *a* le demi-grand axe de la trajectoire de la planète : $\dfrac{a^3}{T^2}$ ***= k avec* k *constant.***

De cette troisième loi, on déduit qu'il existe un facteur constant entre la force exercée et la masse de la planète considérée, qui est la constante de gravitation universelle, ou constante gravitationnelle.