Chapitre 8 : Mouvement dans un champ de gravitation.

I. Mouvement des satellites dans un champ de gravitation.

- *Déterminer les caractéristiques des vecteurs vitesse et accélération du centre de masse d'un système en mouvement circulaire dans un champ de gravitation newtonien.*

1. C'est quoi un satellite ?

En astronomie, un **satellite naturel** (du latin satelles, satellitis : escorte, garde) est **un corps en orbite autour d'un corps plus massif**. Il peut s'agir d'un astre comme la Lune ou les satellites de Saturne ou encore d'un nombre important de corps comme une galaxie satellite.

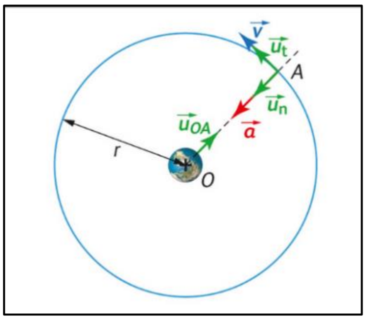
En astronautique, on appelle **satellite artificiel** un objet d'origine humaine mis en orbite autour de la Terre ou d'un autre astre

2. Détermination du vecteur accélération d'un satellite.

Prenons l'exemple de la Lune, satellite de la Terre.

La Lune est soumise dans le référentiel géocentrique à la force gravitationnelle exercée par la Terre :

$$\vec{F} = G \, . \, \frac{Ms.m}{r^2} \, . \, \vec{u}_n$$



Appliquons la deuxième loi de Newton :

$$\vec{F} = m.\vec{a} \text{ soit } \vec{a} = G \, . \, \frac{Ms.}{r^2} \, . \, \vec{u}_n$$

Remarque :

Le vecteur accélération d'une planète est indépendant de sa masse. Il est toujours suivant la direction planète-satellite et il est dit **radial** ; il est toujours dirigé vers le centre de la planète, il est dit **centripète**.

Le vecteur accélération n'est pas dirigé suivant une direction fixe comme pour l'étude d'un projectile dans un champ de pesanteur, il varie avec le mouvement en direction.

3. Comment déterminer la vitesse du mouvement ?

On a $\quad \vec{a} = - G \, . \, \frac{Ms.}{r^2} \, . \, \vec{u} = G \, . \, \frac{Ms.}{r^2} \, \vec{Un}$

Et dans le repère de Frenet :

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt} \, \vec{Ut} + \frac{V^2}{r} \, \vec{Un} = G \, . \, \frac{Ms.}{r^2} \, \vec{Un}$$

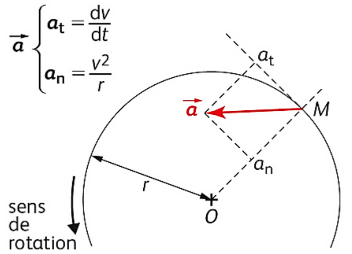
En identifiant on a sur $\vec{Ut}$: $\frac{dV}{dt} = 0$: la vitesse est constante

$$\vec{Un} \; : \; \frac{V^2}{r} = G.\frac{Ms.}{r^2} \qquad \text{d'où } V = \sqrt{\frac{G.Ms}{r}}$$

Lorsqu'un point M est animé d'un mouvement circulaire, on définit les coordonnées a_n et a_t du vecteur accélération $\vec{a}$ selon deux directions :
- a_n de direction le rayon OM ;
- a_t de direction la tangente à la trajectoire en M.

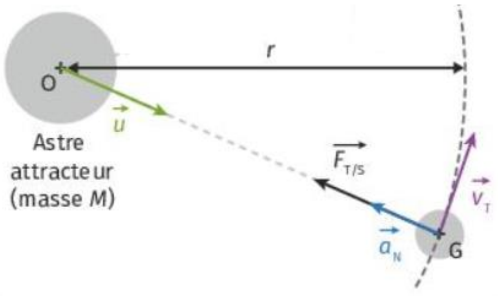
On montre que :

$$\vec{a} \begin{cases} a_t = \frac{dv}{dt} \\ a_n = \frac{v^2}{r} \end{cases}$$



Pas de malentendu

- Le vecteur vitesse $\vec{v}$ du satellite est toujours tangent à sa trajectoire.
- Le vecteur $\vec{v}$ n'est pas constant sur la trajectoire, car sa direction change durant la révolution. Mais son intensité v reste constante sur une orbite de rayon r donnée.
- Comme le vecteur accélération $\vec{a}$ est orienté vers le centre de masse de l'objet attracteur, il est centripète et non centrifuge.



4. Satellite géostationnaire

Un **satellite géostationnaire** est un **satellite** artificiel qui se trouve sur une orbite **géostationnaire**. Sur cette orbite le **satellite** se déplace de manière exactement synchrone avec la planète et reste constamment au-dessus du même point de la surface.
La période d'un satellite géostationnaire est donc égale à la période de rotation de la Terre donc ….. 24 h.

II. Mouvement des planètes et lois de Kepler.

- *Déterminer les caractéristiques des vecteurs vitesse et accélération du centre de masse d'un système en mouvement circulaire dans un champ de gravitation newtonien.*

1. Comment déterminer la vitesse d'une planète ?

Dans le référentiel lié au centre d'un astre attracteur et dans des conditions d'approximations de trajectoires assimilées à des trajectoires circulaires, la planète ou le satellite de centre S et de masse m tourne autour de l'astre attracteur de masse M, selon une orbite circulaire de rayon r.

La planète ou le satellite n'est soumis qu'à l'action mécanique exercée par l'astre attracteur qui se modélise par la force gravitationnelle.

D'après la deuxième loi de Newton, on peut écrire :

$\vec{F}_{O/S} = m \cdot \vec{a}$ or $\vec{F}_{O/S} = G\dfrac{m \cdot M}{r^2}\vec{n}$ ainsi $G\dfrac{m \cdot M}{r^2}\vec{n} = m \cdot \vec{a}$. Soit $\vec{a} = G\dfrac{M}{r^2}\vec{n}$.

> Une planète ou un satellite tournant autour de son astre attracteur a un vecteur accélération dirigé vers le centre de sa trajectoire circulaire. Le **vecteur accélération** est donc **radial et centripète**

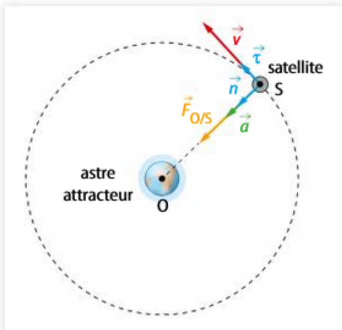


FIG. 4 Accélération et vitesse sur une orbite circulaire.

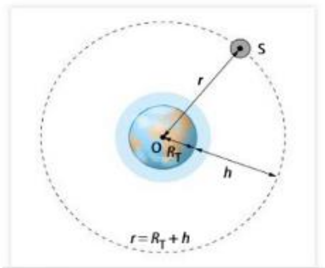
L'accélération dans le repère de Frenet s'écrit : $\vec{a} = \dfrac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + \dfrac{v^2}{r} \cdot \vec{n}$

L'expression trouvée précédemment impose que le terme $\dfrac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} = \vec{0}$ et donc que $\dfrac{dv}{dt} = 0$. La vitesse est donc constante.

> Une planète ou un satellite possède une vitesse constante sur une orbite circulaire. Le **mouvement** est dit **circulaire** et **uniforme**.
> L'accélération a pour expression :
>
> $$\boxed{\vec{a} = \frac{v^2}{r} \cdot \vec{n}}$$
>
> vecteur accélération (m · s⁻²) → $\vec{a}$; v : vitesse du satellite ou planète (m · s⁻¹) ; $\vec{n}$: vecteur unitaire du repère de Frenet radial et centripète ; r : rayon du cercle (m)
>
> La vitesse est perpendiculaire à l'accélération et s'écrit :
> $\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$ où $\vec{\tau}$ est le vecteur unitaire dans le repère de Frenet tangent à la trajectoire (FIG. 4).

D'après ce qui précède, le mouvement étant circulaire et uniforme,
$a = \dfrac{G \cdot M}{r^2} = \dfrac{v^2}{r}$ donc : $v = \sqrt{\dfrac{G \cdot M}{r}}$.

> La **vitesse** d'une planète ou d'un satellite sur une orbite circulaire autour d'un astre attracteur est :
>
> $$\boxed{v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}}$$
>
> vitesse (m · s⁻¹) → v ; constante universelle de gravitation $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ m³ · kg⁻¹ · s⁻² ; M : masse (kg) de l'astre attracteur ; r : rayon du cercle (m)

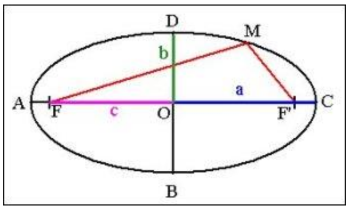


2. Les lois de Kepler.

Première Loi = Loi des orbites

Les planètes décrivent autour du Soleil des orbites en forme d'ellipses. Le soleil ne se trouve pas au centre de l'ellipse, mais sur un point appelé foyer.

C'est quoi une ellipse ? http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Coniques/Ellipse/Ellipse_foyers.html



O : centre

F et F' : foyers tel que OF = OF' = c avec **c** : distance du centre au foyer

a : longueur du demi grand axe

b : longueur du demi petit axe

AC : grand axe **AC = 2.a** **BD** : petit axe

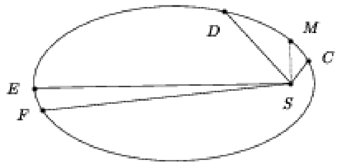
e : excentricité e = c/a

Pour tout point M de l'ellipse MF+MF'=2a

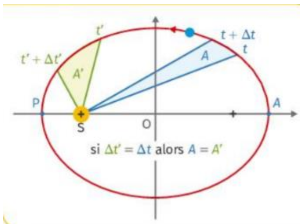
Pour une ellipse l'excentricité est comprise entre 0 et 1 ; si e est petit, on a presque un cercle.

Seconde Loi = Loi des aires

Si *S* est le Soleil et *M* une position quelconque d'une planète, l'aire balayée par le segment [*SM*] entre deux positions *C* et *D* est égale à l'aire balayée par ce segment entre deux positions E et F si la durée qui sépare les positions *C* et *D* est égale à la durée qui sépare les positions *E* et *F*.



La vitesse d'une planète devient donc plus grande lorsque la planète se rapproche du soleil. Elle est maximale au voisinage du rayon le plus court (périhélie), et minimale au voisinage du rayon le plus grand (aphélie).



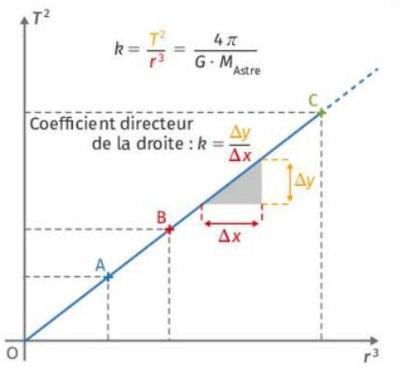
Troisième Loi = Loi des périodes

Le carré de la durée de la période d'une révolution T, d'une planète est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'ellipse

$$T^2 = k \cdot a^3$$

T : période de révolution de l'arbre en orbite (s)
k : constante dépendant de l'astre attracteur ($s^2 \cdot m^{-3}$)
a : demi-grand axe (m)

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T}$$

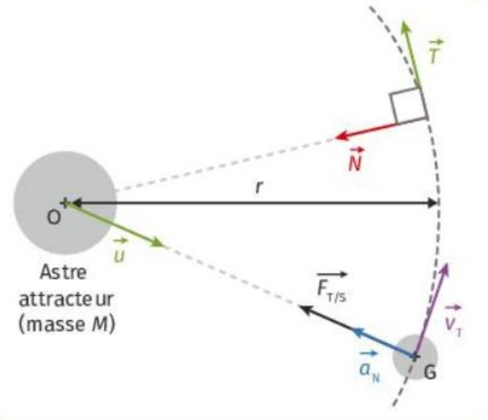


Pour des satellites en orbite autour du même astre central :

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} = \dots = \frac{T_n^2}{r_n^3}$$

3. Comment retrouver la 3 ^{éme} loi de Kepler ?

- *Établir et exploiter la troisième loi de Kepler dans le cas du mouvement circulaire.*
- **Capacité numérique** : Exploiter, à l'aide d'un langage de programmation, des données astronomiques ou satellitaires pour tester les deuxièmes et troisième lois de Kepler.



Un satellite est soumis à la force gravitationnelle :

$$\vec{F} = -G \times \frac{Ms.m}{r^2} . \vec{u} = G \times \frac{Ms.m}{r^2} . \vec{N}$$

Appliquons la deuxième loi de Newton :

$$\vec{F} = m. \vec{a} \text{ soit } \vec{a} = G . \frac{Ms.}{r^2} . \vec{N}$$

Dans le repère de Frenet : $\frac{dV}{dt} \vec{T} + \frac{V^2}{r} \vec{N} = G . \frac{Ms.}{r^2} \vec{N}$

Sur l'axe $\vec{N}$: $\frac{V^2}{r} = G. \frac{Ms.}{r^2}$ d'où $V = \sqrt{\frac{G.Ms}{r}}$

Pour retrouver la 3 ème loi de Kepler, il faut introduire la période : la période est $T = \frac{2.\pi}{V} = 2. \pi . \sqrt{\frac{r3}{G.Ms}}$

Elevons au carré : $T^2 = 4. \pi^2 . \frac{r3}{G.Ms}$ et $T^2/r^3 = cste$

4. Période de révolution.

Pas de malentendu

- Ne pas confondre la période de **révolution** avec la période de **rotation** (sur elle-même) d'une planète.
- Par exemple, on estime, pour la Terre :
  - période rotation : 24 h ;
  - période de révolution : 365,25 j.

Vocabulaire

- **Jour sidéral :** durée nécessaire à la Terre pour réaliser une rotation complète sur elle-même.
- **Jour solaire moyen :** durée qui sépare deux passages successifs du Soleil à la verticale d'un même lieu, soit 24 h = 86 400 s.